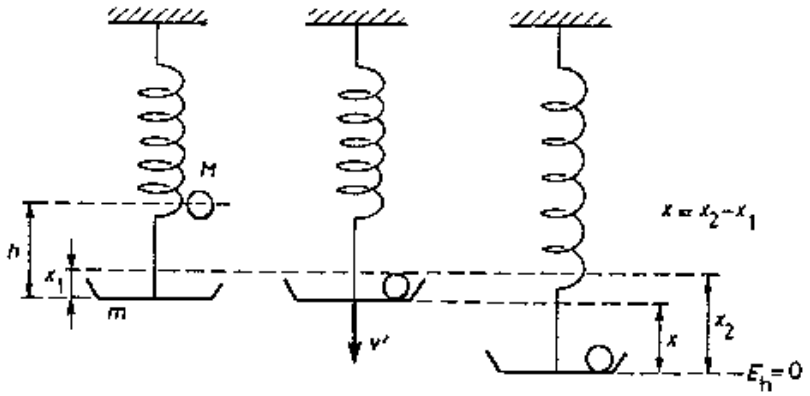
8.64. Súlytalannak tekinthető, $D = 15{,}3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú rugón $m = 25$ g tömegű tányér függ. Az $M = 50$ g tömegű test $h = 9$ cm magasról a tányérra esik, és azzal tökéletesen rugalmatlanul ütközik.

a) Milyen mélyre süllyed a tányér ennek következtében?
b) A legmélyebb helyzet elérése után milyen mozgást végez a rendszer?
c) Határozzuk meg a mozgás kinematikai jellemzőit!

Megoldás:

8.64. $D = 15{,}3$ N; $m = 0{,}025$ kg; $M = 0{,}05$ kg; $h = 0{,}09$ m.



a) Az m tömegű test esésekor kezdeti helyzeti energiája mozgási energiává alakul.

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} M \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Ütközésekor a lendület-megmaradás elve szerint:

$$M \cdot v = (M + m) \cdot v' \rightarrow v' = \frac{M \cdot v}{M + m} = \frac{M \cdot \sqrt{2gh}}{M + m}.$$

Ez a tányér és a test közös sebessége az ütközés után.

A rugó a golyó érkezésekor már megnyújtott állapotban volt:
$x_1 = \frac{m \cdot g}{D}$.
Ezután a két test együttes helyzeti és mozgási energiája rugalmas energiává alakul:

$$(M+m)g \cdot (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}D \cdot x_2^2 - \frac{1}{2}D \cdot x_1.$$

v, v', x_1 beírásával:

$$(M+m)g \cdot x_2 - \frac{(M+m) \cdot m \cdot g^2}{D} + \frac{M^2 \cdot g \cdot h}{M+m} = \frac{1}{2}D \cdot x_2^2 - \frac{m^2 \cdot g^2}{2D}.$$

Az adatok beírása után x_2-ben másodfokú egyenletet kapunk, amelynek pozitív megoldása lehet jó a feladat szempontjából: $x_2 = 11{,}96$ cm.
A tányér $\underline{\underline{x}} = x_2 - x_1 = \underline{\underline{10{,}36 \text{ cm}}}$-rel süllyed lejjebb.

b) Harmonikus rezgőmozgást végez.

c) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{D}} = 0{,}44$ s.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 14{,}27$ Hz; $\underline{\underline{f}} = \frac{1}{T} = \underline{\underline{2{,}27 \text{ Hz}}}$.
Az egyensúlyi helyzet az lesz, amit a két test együttes megnyúlása hoz létre.

$$x' = \frac{(M+m) \cdot g}{D} = 4{,}9 \text{ cm}.$$

Így az amplitúdó: $\underline{\underline{A}} = x_2 - x' = \underline{\underline{7{,}06 \text{ cm}}}$.